Introducción a la estimación espectral

Episodio I: técnicas no paramétricas

Andrés Altieri

Procesamiento de Señales II
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Segundo cuatrimestre de 2015

Contenidos

Contenidos

Señales determinísticas: densidad espectral de energía (I)

- Sea $y[n], \ n \in \mathbb{Z}$ una señal determinística discreta.
- Asumimos que y es de energía finita, es decir:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |y[n]|^2 < \infty.$$

- Esto implica que la señal puede representarse por medio de su transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{j\omega n} \qquad \text{DTFT}$$

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega \qquad \text{DTFT inversa}$$

- Definimos entonces la *densidad espectral de energía* como:

$$S(\omega) \triangleq |Y(\omega)|^2$$

Señales determinísticas: densidad espectral de energía (II)

- Por el teorema de Parseval tenemos:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |y[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega,$$

por lo que de ahi el nombre de densidad espectral de energía.

- Definimos ahora una secuencia de autocorrelación para la señal discreta:

$$\rho[k] \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]y^*[n-k].$$

- Se observa que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{DTFT}(\rho[k]) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k}\sum_{n} y[n]y^*[n-k]e^{-j\omega n}e^{-j\omega(n-k)} \\
&= \left[\sum_{n} y[n]e^{-j\omega n}\right]\left[\sum_{m} y^*[m]e^{-j\omega m}\right] \qquad (n-k=m) \\
&= S(\omega)
\end{aligned}$$

Señales aleatorias: densidad espectral de potencia (I)

- Las señales aleatorias, como secuencias temporales, en general no tiene energía finita.
- En general tienen *potencia promedio* finita.
- Sea $y[n],\ n \in \mathbb{Z}$ una señal determinística discreta.
- Asumimos que y es ESA de media nula:

$$\mathbb{E}[y[n]] = 0 \forall n$$

  La secuencia de *autocovarianza* el proceso es entonces:

$$r[k] \triangleq \mathbb{E}[(y[n] - \mathbb{E}[y[n]])(y[n-k] - \mathbb{E}[y[n-k]])^*] = \mathbb{E}[y[n]y[n-k]^*]$$

- Propiedades de la autocovarianza:
  - Secuencia hermítica: $r[k] = r[-k]^*$.
  - $r[0] \geq |r[k]| \quad \forall k$

Señales aleatorias: densidad espectral de potencia (II)

Podemos generalizar la definición de la PSD del caso discreto con dos definiciones

Densidad espectral de potencia (PSD): primera definición

Se la define como la transformada de Fourier de la autocorrelación:

$$\phi(\omega) \triangleq \sum_{k} r[k] e^{-j\omega k}$$

Igual que antes por Parseval tenemos:

$$\sigma_y^2 = r[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega) d\omega.$$

Densidad espectral de potencia: primera definición

Se define a partir de un límite temporal:

$$\phi(\omega) \triangleq \lim_{N \to \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} y[n] e^{j\omega n} \right|^2 \right]$$

Relación entre las definiciones

- Son extensiones de las definiciones para señales determinísticas.
- En el caso determinístico coinciden. En este caso, coinciden si:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} |k||r[k]| = 0.$$

  No es un requisito muy restrictivo.
- La primera definición es la más usual.

Propiedades de la densidad espectral de potencia

- Es real, como es de esperarse, y $\phi(\omega) \geq 0$
- Usando la Definición 1 y que $r[k] = r[-k]^*$, escribimos:

$$\phi(\omega) = r[0] + 2\sum_{k=1}^{\infty} \Re\{r[k]e^{j\omega k}\},$$

y para señales reales, $r[k]$ resulta real y par y entonces:

$$\phi(\omega) = r[0] + 2\sum_{k=1}^{\infty} r[k]\cos(\omega k),$$

también es par.

PSD a la salida de un sistema LTI (I)

- Sea un sistema LTI con respuesta impulsiva $h[n]$ y entrada $x[n]$ de PSD ϕ_x.
- La salida del sistema se escribe como:

$$y[n] = \sum_m h[m]x[n-m]$$

- La correlación de la salida es:

$$\begin{aligned} r_y[k] &= \mathbb{E}\left[y[n]y[n-k]^*\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_m h[m]x[n-m]\sum_p h[p]^* x[(n-k)-p]\right] \\ &= \sum_m \sum_p h[m]h[p]^* \mathbb{E}\left[x[n-m]x[n-k-p]\right] \end{aligned}$$

$$r_y[k] = \sum_m \sum_p h[m]h[p]^* r_x[k+p-m]$$

PSD a la salida de un sistema LTI (II)

- La PSD de la salida es entonces:

$$\begin{aligned}
\phi_y(\omega) &= \sum_k y_r[k]e^{j\omega k} \\
&= \sum_k \sum_m \sum_p h[m]h[p]^* r_x[k+p-m]e^{j\omega k} \\
&= \sum_q \sum_m \sum_p h[m]h[p]^* r_x[q]e^{j\omega(q-p+m)} \longleftarrow k = q-p+m \\
&= \left(\sum_m h[m]e^{j\omega m}\right)\left(\sum_p h[p]^* e^{-j\omega p}\right)\left(\sum_q r_x[q]e^{j\omega q}\right)
\end{aligned}$$

Relación entre la PSD a la entrada y a la salida

$$\phi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \phi_x(\omega) \quad \forall\omega$$

El problema de estimación espectral

Enunciado del problema

A partir de un conjunto de N muestras de un proceso ESA y:

$$\{y[1], \ldots, y[N]\}$$

el objetivo es hallar un estimador $\hat{\phi}_y$ de la densidad espectral de potencia ϕ_y.

- En general el número de muestras N puede ser pequeño, lo que introduce una limitación al buscar un estimador "bueno".
- Las señales a veces son no estacionarias, y la hipótesis de estacionariedad puede ser válida solo en una ventana de tiempo corta.

Clasificación de técnicas

Las técnicas se definen básicamente en dos clases:

- Técnicas no parámetricas:
  - No asumen ningún modelo para la señal de entrada.
  - Se basan en la propia definición de la PSD.
  - El paradigma de estas técnicas es el periodograma.
- Técnicas paramétricas:
  - Se introducen hipótesis que permiten obtener un modelo de la PSD a estimar.
  - El modelo depende de ciertos parámetros que son estimados a partir de la muestras.
  - Son empleados cuando la información disponible permite construir un modelo adecuado para la señal.

Contenidos

2. Técnicas no paramétricas

Introducción: generalidades

- Corresponden a técnicas “clásicas” de estimación.
- Parten de las dos definiciones básicas de la PSD:

$$\phi(\omega) \triangleq \sum_{k} r[k] e^{-j\omega k} \qquad \phi(\omega) \triangleq \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} y[n] e^{j\omega n}\right|^2\right]$$

- En general, no son estimadores “buenos” pues su varianza no tiende a cero cuando el número de muestras crece.

Periodograma

La segunda definición de la PSD conduce al llamado *periodograma*:

Definición

El periodograma se basa en hacer la DTFT de las muestras de la señal, tomar módulo y normalizar:

$$\hat{\phi}_p(\omega) \triangleq \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} y[n]e^{j\omega n}\right|^2$$

- Arthur Schuster le puso ese nombre en 1898 al usarlo para detectar periodicidades ocultas en señales.
- En la práctica se utiliza la DFT para muestrear el periodograma (FFT).

Correlograma

La primera definición de la PSD conduce al llamado *correlograma* [Blackman y Tukey, 1959]:

Correlograma

Consiste en hacer la DTFT de un estimador de la autocovarianza de la señal:

$$\hat{\phi}_c(\omega) \triangleq \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}[k] e^{j\omega k}$$

$\{r[k]\}_k$ es algún estimador de la covarianza

A continuación estudiamos algunos de los estimadores clásicos de la covarianza.

Estimadores usuales de la covarianza(I)

Estimador insesgado de la covarianza

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k+1}^{N} y[n]y^*[n-k], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Podemos definir:

$$\mathbf{y}_i = [\underbrace{0,\ldots,0}_{i}, y_1,\ldots,y_{N-i}]^T \in \mathbb{C}^N, 0 \leq i \leq N-1$$

- $k = 0 \longrightarrow N$ sumas, y dividimos por N:

$$\hat{r}[0] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |y[n]|^2 = \frac{1}{N}||y_0||^2$$

- $k = 1 \longrightarrow N-1$ sumas, y dividimos por $N-1$:

$$\hat{r}[1] = \frac{1}{N-1}\left(y[1]y[0]^* + +y[2]y[1]^* \ldots + y[N]y^*[N-1]\right) = \frac{1}{N-1}\mathbf{y}_1^H\mathbf{y}_0$$

Estimadores usuales de la covarianza (II)

- $k = N - 1 \longrightarrow 1$ suma, y dividimos por 1:

$$\hat{r}[N] = y[N]y[1]^* = \mathbf{y}_{N-1}^H \mathbf{y}_0$$

¡Una sola suma!

Observaciones

- Normalmente la correlación decrece con k en forma bastante rápida, es decir,

$$|r[k]| \underset{|k|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en forma rápida.}$$

- La cantidad de sumas y el divisor decrecen con k para este estimador.
- La secuencia obtenida no da una matriz de covarianza semidefinida positiva.

Conclusión: para k grande se estiman valores pequeños con pocas sumas, lo que conduce en general a valores más erráticos y a una matriz potencialmente no semidefinida positiva.

Estimadores usuales de la covarianza (III)

Estimador sesgado de la covarianza

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^{N} y[n]y[n-k]^*, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

- $k = N - 1 \longrightarrow 1$ suma, y dividimos por N:

$$\hat{r}[N] = \frac{1}{N} y[N]y[1]^* = \frac{1}{N} \mathbf{y}_{N-1}^H \mathbf{y}_0$$

¡Una sola suma! Pero divida por N.

Observaciones

- Al ponderar todo por N se reducen las oscilaciones en valores grandes de k.
- La secuencia obtenida da una matriz de correlación semidefinida positiva.

Conclusión: este estimador es preferible en general.

Relación entre periodograma y correlograma

Teorema

Si usamos el estimador **sesgado** de la covarianza:

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^{N} y[n] y[n-k]^*, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

el periodograma y el correlograma **coinciden**.

- Utilizaremos siempre el periodograma o correlograma calculado con el estimador sesgado.
- Se utilizará la FFT para aproximar el periodograma, lo que requiere que un largo que sea potencia de 2.
- Podemos agregar ceros para extender la señal, pero esto **no mejora la resolución** pues la FFT sólo muestrea el periodograma continuo.

Propiedades estadísticas del periodograma

- Dado un parámetro a y un estimador $\hat{X}$ para a podemos usar el error cuadrático medio ECM para calificarlo:

$$\begin{aligned}\mathrm{ECM}(\hat{X}) &= \mathbb{E}\left[|a-\hat{X}|^2\right]\\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left[|\hat{X}-E[\hat{X}]|^2\right]}_{\text{Varianza}} + |\underbrace{a-\mathbb{E}[\hat{X}]}_{\text{Sesgo}}|^2\end{aligned}$$

Pondera el sesgo y varianza en una sola métrica.

Observaciones

- El periodograma es asintóticamente insesgado.
- Sin embargo, la varianza no decrece con N, por lo que no son buenos estimadores en sentido estadístico. Es inconsistente, pues la varianza no va a cero con N (claramente tampoco el MSE).

Análisis del sesgo del periodograma (I)

- Buscamos la esperanza del estimador sesgado:
  - Con $0 \leq k \leq N-1$:

$$\mathbb{E}\left[\hat{r}[k]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=k+1}^{N} y[n]y[n-k]^*\right] = \frac{N-k}{N}r[k].$$

  Si $k < 0$ usamos que $r[k] = r[-k]^*$.

Esperanza del estimador sesgado

$$\mathbb{E}\left[\hat{r}[k]\right] = \frac{N-|k|}{N}r[k] = w_B[k]r[k].$$

donde $w_B[k] = \frac{N-|k|}{N}\mathbb{1}\{|k| \leq N-1\}$ es la ventana triangular o de Bartlett.
La esperanza del estimador insesgado es la verdadera autocorrelación, ventaneada con la ventana triangular .

Análisis del sesgo del periodograma (II)

Tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E}\left[\phi_p(\omega)\right] = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \mathbb{E}\left[\hat{r}[k]\right] e^{j\omega k} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w_B[k] r[k] e^{j\omega k}$$

Conclusión

- La esperanza del periodograma es la convolución periódica entre la PSD real y la ventana triangular.
- Cuando N crece, la ventana se angosta en frecuencia y el sesgo tiende a cero.

Para el estimador insesgado de la autocovarianza, se obtiene lo mismo pero la ventana es rectangular.

Análisis del sesgo del periodograma (III)

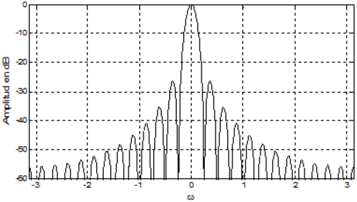

Figura: Ventana de Bartlett normalizada $N = 25$.

- Efecto del lóbulo principal: produce un suavizado o *smearing* (borroneado) del espectro.
- Efecto de los lóbulos secundarios: produce un escurrimiento/goteo/filtrado o *leakage* de potencia hacia bandas de frecuencia donde puede no haberlas.

Resolución del periodograma

- El ancho del lobulo de Bartlett es aprox. $1/N$, de modo que se dice que $1/N$ es el límite de resolución del periodograma.
- Esto significa que (aprox) dos frecuencias f_1, f_2 (en muestras/Hz) tal que

$$|f_2 - f_1| \lesssim 1/N$$

  no pueden distinguirse.
- Esto es importante si el espectro tiene muchos picos, pero no es tan importante en espectros suaves.

Análisis de la varianza del periodograma (I)

- Se estudia la varianza asintótica del periodograma.
- Primero se considera un proceso de ruido blanco Gaussiano complejo x, circularmente simétrico y varianza σ^2:
  - Las componentes real e imaginaria del ruido estan descorrelacionadas y tienen varianza $\sigma^2/2$.
  - La PSD es constante y de valor σ^2.
- Puede demostrarse que en ese caso (ruido blanco), la covarianza del periodograma es:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[(\hat{\phi}_p(\omega_1) - \mathbb{E}[\hat{\phi}_p(\omega_1)])(\hat{\phi}_p(\omega_2) - \mathbb{E}[\hat{\phi}_p(\omega_2)])^*\right] = \sigma^2 \delta_{\omega_1,\omega_2}$$

  es decir, asintóticamente, las componentes del periodograma están descorrelacionadas.
- En particular, esto se demuestra hallando la covarianza para todo N y tomando luego el límite.

Análisis de la varianza del periodograma (II)

- Luego se considera que el ruido blanco es pasado por un sistema LTI:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} h[n-k]x[k],$$

$$\phi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \phi_x(\omega)$$

Este es un modelo muy general porque puede elegirse cualquier respuesta h.

- Entonces cuando N es grande puede probarse que el periodograma cumple:

$$\hat{\phi}_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \hat{\phi}_x(\omega) + O(1/\sqrt{N}),$$

Es decir, cumple una ecuación similar a las PSDs reales.

- Aclaración: se dice que $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to \infty$ si existen x_0 y M constantes tales que:

$$f(x) \leq Mg(x) \quad \forall x > x_0.$$

Análisis de la varianza del periodograma (III)

Conclusión

- Las componentes de $\hat{\phi}_y(\omega)$ también están asintóticamente descorrelacionadas y su varianza asintótica no es nula.

  ¡¡Tomar más muestras no reduce la varianza del estimador !!
- Es un estimador **inconsistente**, porque la varianza no va a 0 con N.
- Como asintóticamente las componentes están descorrelacionadas, su comportamiento es algo errático.

- Existen varias técnicas "mejoradas" que toman como base el periodograma.
- En general hay un intercambio/balance entre resolución y varianza.

Técnica de Blackman-Tukey (I)

- La variabilidad del periodograma surge de la poca precisión para estimar la correlación para k grande.
- También de la sumatoria de numerosos errores de estimación de la covarianza.
- Blackman-Tukey propone ventanear y truncar la señal para mitigar esto:

$$\hat{\phi}_{BT}(\omega) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w[k]r[k]e^{-j\omega k},$$

con w una función par, decreciente, y con $w[0] = 1$.
En frecuencia ventanear equivale a una convolución períodica:

$$\phi = W \circledast \phi_p.$$

- Esto implica que BT es un promedio local del periodograma, que reduce su resolución.
- Al mismo tiempo, truncar a M muestras elimina las muestras que tienen pocas sumas y reduce la varianza asi como las oscilaciones.

Técnica de Blackman-Tukey (II)

- Esto permite intercambiar resolucion/varianza según se desee.
- En forma aproximada, la resolución se reduce a $1/M$ y la varianza en M/N
- Si la ventana es no negativa, el estimador obtenido también lo será.
- La mayoría de las ventanas son no negativas en tiempo y frecuencia (o toman valores positivos mucho mayores).
- Además, poseen picos en el origen en ambos dominios.
- Para este tipo de ventanas puede establecerse un equivalente entre ancho de banda en el tiempo y frecuencia.

Equivalencia de ancho de banda tiempo-frecuencia

- Definimos el ancho temporal equivalente de la ventana como:

$$N_e = \frac{\sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w[k]}{w[0]},$$

  y el ancho de banda equivalente como:

$$\beta_e = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(\omega)d\omega}{W(0)}.$$

- Es facil ver que:

$$N_e\beta_e = 1,$$

  es decir, si una ventana dispersa su energía respecto del valor en 0 (N_e grande), β_e será pequeño (energía concentrada en $W(0)$.
- Eligiendo $M < N/10$ se reduce el desvío aproximadamente tres veces con respecto al periodograma. Luego puede elegirse la forma de la ventana para balancear *smearing* y *leakage*.

Otras técnicas: Bartlett (I) [1948-50]

- Se divide la secuencia de N muestras en $L = M/N$ secuencias de M muestras:

$$y_j[n] = y[(j-1)M + n], \qquad n = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, L.$$

- Se computa el periodograma de cada secuencia:

$$\hat{\phi}_j(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=1}^{M} y_j[n] e^{j\omega n} \right|^2 .$$

- Se promedian los periodogramas obtenidos para obtener el estimador de Bartlett:

$$\hat{\phi}_B(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} \hat{\phi}_j(\omega).$$

- Promediar el periodograma debería reducir la varianza.

Otras técnicas: Bartlett (II)

- Puede rescribirse como:

$$\phi_B(\omega) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} \left[\frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} \hat{r}_j[k] \right] e^{j\omega k}.$$

  donde se ve que es similar a un BT con ventana rectangular.
- Pero los estimadores r_j usan pocas muestras y por lo tanto la varianza se verá incrementada respecto de BT con ventana rectangular de largo M, pero reducida respecto del periodograma normal.
- El ancho relativo N_e es de los más pequeños entre todas las ventanas, por lo cual tendrá la mayor resolución de los BT (el menor *smearing*), pero el peor *leakage*.

Otras técnicas: Welch [1967] (I)

- Refina la técnica de Bartlett, permitiendo que se superpongan las ventanas.
- Se divide la secuencia de N muestras en S secuencias de M muestras, superpuestas cada K muestras:

$$y_j[n] = y[(j-1)K + n], \qquad n = 1, \dots, S, \quad j = 1, \dots, L.$$

- Típicamente se deja 50 % de superposición, es decir:

$$K = M/2,$$

  y $S \approx 2M/N$.
- Se computa el periodograma de cada secuencia pero ventaneándola:

$$\hat{\phi}_j(\omega) = \frac{1}{MP} \left| \sum_{n=1}^{M} v[n] y_j[n] e^{j\omega n} \right|^2 .$$

  con: $P = 1/M \sum_{k=1}^{M} |v[k]|^2$.
- Se promedian los periodogramas obtenidos para obtener el estimador de Welch:

$$\hat{\phi}_W(\omega) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^{S} \hat{\phi}_j(\omega).$$

Otras técnicas: Welch [1967] (II)

- Superponer muestras permite aprovechar mejor la información para obtener el periodograma. Se promedian más periodogramas que antes, reduciendo la varianza.
- Ventanear en el tiempo permite reducir el peso de las muestras de los extremos, que son compartidas por dos grupos de muestras, reduciendo la correlación entre los periodogramas.
- Puede rescribirse como en una forma similar a la del estimador de BT.
- Es un estimador de los más utilizados.

Otras técnicas: Daniell [1946] (I)

- Consiste en hacer un promedio local del periodograma, para reducir su varianza, es decir:

$$\hat{\phi}_D(\omega_k) = \frac{1}{2J+1} \sum_{j=k-J}^{k+J} \hat{\phi}_p(\omega_j).$$

- Debe hacerse una FFT de largo $\bar{N} \gg N$, y tomar un J pequeño, para que la FFT sea bastante constante en la ventana.
- Esto implica que es equivalente a un estimador BT donde la ventana en frecuencia es rectangular (una sinc en el tiempo), es decir:

$$\hat{\phi}_D(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w[k]\hat{r}[k]e^{-j\omega k}$$

con $w[k] = \mathrm{sinc}(k\pi J/\bar{N})$.

- Como la sinc no se anula, la sumatoria de la expresión del estimador de Blackman no se trunca en M.
- Sin embargo, el parámetro $M = \bar{N}/J$ cumple el rol equivalente al M.

Ejemplo: resolución del periodograma (I)

- Consideremos el siguente modelo

$$y[n] = \sin\left[2\pi f_0 n\right] + \sin\left[2\pi\left(f_0 + \frac{\alpha}{N}\right)n\right], \quad n = 1, \dots, N$$

  α es la diferencia de frecuencia entre las sinusoides.

- Consideramos $N = 256$, de modo que la resolución debería ser, aprox:

$$1/N = 0{,}0039,$$

  es decir, $\alpha = 1$.

Ejemplo: resolución del periodograma (II)

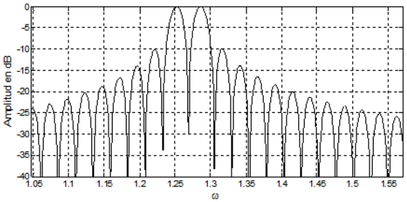

Figura: Espectro para $\alpha = 1$. $\frac{\alpha}{N} = 0{,}039$. FFT de 8192 puntos

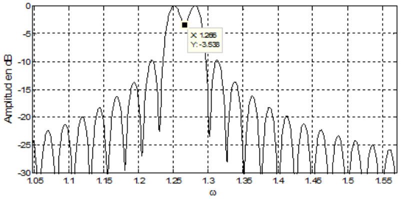

Figura: Espectro para $\alpha = 0{,}75$. $\frac{\alpha}{N} = 0{,}029$. FFT de 8192 puntos

Ejemplo: resolución del periodograma (III)

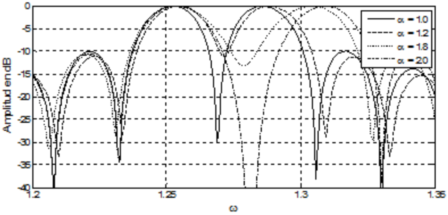

Figura: Espectro para $\alpha > 1.$. FFT de 8192 puntos

pero luego para $2 > \alpha > 1$ la brecha entre los picos vuelve a angostarse y a aumentar porque se superponen los dos primeros lóbulos secundarios, que son los de mayor amplitud.

- Para $\alpha = 1$, límite teórico de resolución, ambos lóbulos estás separados.
- Para $2 > \alpha > 1$ la brecha entre los picos vuelve a angostarse y a aumentar, por los lóbulos secundarios.
- Para $\alpha > 2$ los lóbulos se separan definitivamente

Ejemplo: resolución del periodograma (IV)

- La resolución se ve afectada también por la fase relativa de las señales.
- Si las señales tienen diferente amplitud, una puede enmascarar a la otra.

Conclusiones

- Las técnicas basadas en el periodograma son todas variaciones sobre un mismo tema.
- El objetivo es reducir la varianza a costa de reducir la resolución en frecuencia.
- Esto se logra suavizando el periodograma, truncando o promediando sub periodogramas.
- En muchos casos, el periodograma es suficiente para caracterizar el comportamiento de las señales. Esto es especialmente cierto si no hay información a priori sobre las características de la señal.