

ESTIMACIÓN ESPECTRAL

86.51

Cecilia G. Galarza

FIUBA

Laboratorio de Procesamiento de Señales y Comunicaciones

1er Cuatrimestre 2023

SEÑALES DETERMINÍSTICAS: DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA (REPASO S&S)

- Sea $y[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, una señal determinística en tiempo discreto con energía finita

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |y[n]|^2 < \infty.$$

y transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n}$$

- Por Parseval tenemos que la energía de la señal es:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |y[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

- Luego, la *densidad espectral de energía* es:

$$S(\omega) \triangleq |Y(\omega)|^2$$

PROCESOS ALEATORIOS: DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA (REPASO ESTOC.)

Los procesos aleatorios en general no tiene energía finita, pero sí pueden tener *potencia promedio* finita.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{n=+N/2} |y[n]|^2 \right]$$

Pregunta: Por qué una señal determinística puede tener energía finita y un proceso aleatorio no?

SEÑALES ALEATORIAS: DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA (REPASO ESTOC.)

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA O *Power Spectral Density* (PSD)

$$\phi(\omega) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \left| \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y[n] e^{-j\omega n} \right|^2 \right]$$

Sea $y[n] \in \mathbb{C}$ un proceso ESA de media nula. Luego, $\forall k$

$$r[k] \triangleq \mathbb{E}[(y[n] - \mathbb{E}[y[n]])(y[n-k] - \mathbb{E}[y[n-k]])^*] = \mathbb{E}[y[n]y[n-k]^*]$$

Si $r[k]$ decrece lo suficientemente rápido, existe su DTFT y

$$\phi(\omega) \triangleq \sum_k r[k] e^{-j\omega k}$$

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Sea $y[n]$ un proceso ESA. A partir de

$$\{y[1], \dots, y[N]\}$$

hallar $\hat{\phi}_y(\omega)$, un estimador para la densidad espectral de potencia $\phi_y(\omega)$.

- En general el número de muestras N puede ser pequeño.
- Las señales a veces son no estacionarias, y la hipótesis de estacionariedad puede ser válida sólo en una ventana de tiempo corta.

EL PROBLEMA DE ESTIMACIÓN ESPECTRAL

En líneas generales, se puede decir que hay dos clases de técnicas para resolver el problema:

- Técnicas no paramétricas:
 - ▶ No asumen un modelo para la señal de entrada.
 - ▶ Se basan en la definición de la PSD.
 - ▶ En general, éstas son técnicas basadas en el periodograma.
- Técnicas paramétricas:
 - ▶ Se introducen hipótesis que definen un modelo de la PSD a estimar.
 - ▶ El modelo depende de ciertos parámetros que son estimados a partir de la muestras.

DEFINICIÓN

$$\hat{\phi}_p(\omega) \triangleq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N y[n] e^{-j\omega n} \right|^2$$

TEOREMA

Si se utiliza el estimador **sesgado** de la autocorrelación:

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^N y[n]y[n-k]^*, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

entonces,

$$\hat{\phi}_p(\omega) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}[k]e^{-j\omega k}$$

SESGO DEL PERIODOGRAMA

El periodograma es asintóticamente insesgado.

Esperanza del estimador sesgado de la autocorrelación:

$$\mathbb{E} [\hat{r}[k]] = \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^N \mathbb{E} \{y[n]y[n-k]^*\} = w_B[k]r[k]$$

donde $w_B[k] = \frac{N-|k|}{N}$, $|k| \leq N-1$, es la ventana triangular de Bartlett.

Esperanza del periodograma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\hat{\phi}_p(\omega) \right] &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \mathbb{E} [\hat{r}[k]] e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w_B[k]r[k]e^{-j\omega k}. \end{aligned}$$

SESGO DEL PERIODOGRAMA

Entonces $\mathbb{E} \left[\hat{\phi}_p(\omega) \right]$ es la DTFT del producto de la ventana $w_B[k]$ con la autocorrelación $r[k]$. Luego,

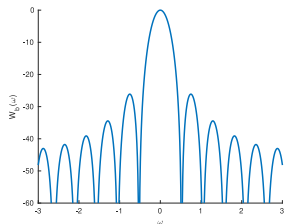
$$\mathbb{E} \left[\hat{\phi}_p(\omega) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega) W_B(\omega - \psi) d\psi$$

donde

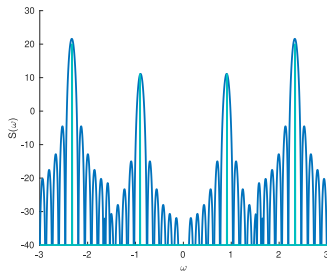
$$W_B(\omega) = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2$$

Cuando N crece, la ventana se angosta en frecuencia y el sesgo tiende a cero.

SESGO DEL PERIODOGRAMA



$W_B(\omega)$: DTFT de la ventana de Barlett
Ancho lóbulo principal: $8\pi/N$



$S(\omega)$: Densidad espectral de potencia

SESGO DEL PERIODOGRAMA

En líneas generales, el ventaneo introduce los siguientes fenómenos:

- Los lóbulos secundarios producen un escurrimiento o *leakage* de potencia.
- El lóbulo principal suaviza o produce *smearing* (borroneado) del espectro.
- El lóbulo principal de Barlett decrece a la mitad en $1/N$. Luego, f_1, f_2 van a quedar confundidas bajo el mismo lóbulo principal si

$$|f_2 - f_1| \lesssim 1/N,$$

- La resolución del períodograma es del orden de $1/N$ (frecuencia discreta).

VARIANZA DEL PERIODOGRAMA

El periodograma es inconsistente.

$\hat{\phi}_p(\omega)$ es un proceso aleatorio complejo. Ya calculamos su esperanza, que llamamos sesgo de $\hat{\phi}_p(\omega)$. Para estudiar su varianza definimos

$$C_{\hat{\phi}_p}(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{E} \left\{ \left[\hat{\phi}_p(\omega_1) - \mathbb{E}[\hat{\phi}_p(\omega_1)] \right] \left[\hat{\phi}_p(\omega_2) - \mathbb{E}[\hat{\phi}_p(\omega_2)] \right]^* \right\}$$

Esta función es compleja de calcular en el caso general. Pero tiene solución cerrada cuando $y[n]$ es un proceso blanco Gaussiano complejo, circularmente simétrico de varianza σ^2 . Es decir, sus componentes real e imaginaria son i.i.d, de media nula y varianza $\sigma^2/2$. En ese caso,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_{\hat{\phi}_p}(\omega_1, \omega_2) = \sigma^2 \delta_{\omega_1, \omega_2}$$

- Las componentes de $\hat{\phi}_p(\omega)$ están asintóticamente descorrelacionadas pero su varianza asintótica no es nula (inconsistencia).
- ¡¡Tomar más muestras no reduce la varianza del estimador !!

EJEMPLO: RESOLUCIÓN DEL PERIODOGRAMA (I)

- Consideremos el siguiente modelo

$$y[n] = \sin [2\pi f_0 n] + \sin \left[2\pi \left(f_0 + \frac{\alpha}{N} \right) n \right], \quad n = 1, \dots, N$$

α es la diferencia de frecuencia entre las senoides.

- Consideramos $N = 256$, de modo que la resolución debería ser, aprox:

$$1/N = 0,0039.$$

EJEMPLO: RESOLUCIÓN DEL PERIODOGRAMA (II)

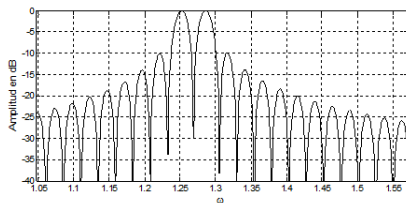


FIGURA: Espectro para $\alpha = 1$. $\frac{\alpha}{N} = 0,039$. FFT de 8192 puntos

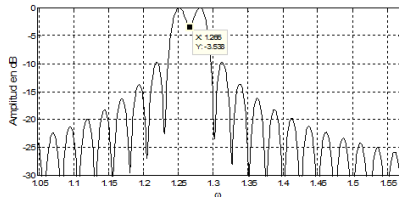


FIGURA: Espectro para $\alpha = 0,75$. $\frac{\alpha}{N} = 0,029 < 0,039$. FFT de 8192 puntos

EJEMPLO: RESOLUCIÓN DEL PERIODOGRAMA (III)

Observaciones:

- La resolución se ve afectada también por la fase relativa de las señales.
- Si las señales tienen diferente amplitud, una puede enmascarar a la otra.

PERÍODOGRAMA: LECCIONES APRENDIDAS

- El períodograma es un estimador no-paramétrico muy sencillo de implementar, pero es inconsistente (no reduce varianza al aumentar N).
- Hay distintas técnicas basadas en el periodograma que logran reducir la varianza suavizando el períodograma (Blackman-Tukey, Welch, entre otras).
- Sin embargo, se establece un compromiso entre la varianza y la resolución en frecuencia.
- De todos modos, hay casos en los cuales el períodograma es suficiente para caracterizar el comportamiento spectral de las señales. Esto es especialmente cierto si no hay información a priori sobre las características de la señal.

ESTIMACIÓN CON ESPECTROS RACIONALES (I)

- Decimos que una función real $\phi(\omega)$ es una función racional de $e^{j\omega}$ cuando puede escribirse como:

$$\phi(\omega) = \frac{\sum_{k=-m}^m \gamma_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=-n}^n \rho_k e^{j\omega k}},$$

donde los coeficientes satisfacen $\gamma_k = \gamma_{-k}^*$ y $\rho_k = \rho_{-k}^*$.

- Las funciones racionales de $e^{j\omega k}$ que son positivas pueden corresponder a PSDs de algún proceso.

ESTIMACIÓN CON ESPECTROS RACIONALES (II)

- Una función racional, real y positiva de $e^{j\omega}$ puede escribirse como:

$$\phi(\omega) = \sigma^2 \left| \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right|^2,$$

donde $A(e^{j\omega})$ y $B(e^{j\omega})$ son polinomios de la forma:

$$A(e^{j\omega}) \triangleq 1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_n e^{-jn\omega}$$

$$B(e^{j\omega}) \triangleq 1 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_m e^{-jm\omega}$$

- En términos de la transformada Z esto puede escribirse como:

$$\phi(z) = \sigma^2 \frac{B(z)B^*(1/z^*)}{A(z)A^*(1/z^*)} \quad \phi(\omega) = \phi(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}.$$

- Dado que los polos de $\phi(z)$ vienen en pares recíprocos y complejos conjugados, si no hay polos en el círculo unidad, la transformada Z convergerá sobre el círculo unitario.

ESTIMACIÓN CON ESPECTROS RACIONALES (III)

- Defino el siguiente sistema LTI

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

- Luego,

$$\phi(\omega) = \sigma^2 \frac{B(e^{j\omega}) B^*(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega}) A^*(e^{j\omega})} = \sigma^2 |H(\omega)|^2$$

Es decir, que $\phi(\omega)$ resulta la PSD de la salida del filtro $H(\omega)$ cuando la entrada es ruido blanco de varianza σ^2 .

- Si se sabe que la PSD es continua aunque no necesariamente racional, el teorema de Stone-Weierstrass dice que las funciones racionales forman un conjunto denso en las funciones continuas. Por lo tanto, eligiendo un orden suficientemente grande, puede aproximarse la PSD con la precisión deseada.

ESTIMACIÓN CON ESPECTROS RACIONALES (IV)

- Esto da lugar a varios modelos:
 - ▶ Si $A \equiv 1$ y $B \neq 1$ la señal es modelada mediante un proceso de tipo MA (*moving average*).
 - ▶ Si $B \equiv 1$ y $A \neq 1$, la señal es modelada mediante un proceso autoregresivo (AR).
 - ▶ Si $A \neq 1$ y $B \neq 1$, el modelo es ARMA.

MODELADO POR PROCESOS AUTOREGRESIVOS

- Se obtiene tomando $B(\omega) \equiv 1$.
- Son sistemas sólo con polos, lo que permite modelar señales de banda angosta con picos colocando polos cerca de la circunferencia unitaria.
- La estimación de los coeficientes del AR se obtienen resolviendo ecuaciones lineales, lo que lo hace un técnica atractiva.

MODELADO AR: ECUACIONES DE YULE-WALKER (I)

- El proceso AR puede caracterizarse por la ecuación en diferencias:

$$y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] = b_0 x[k].$$

- Multiplicando por $y^*[k-p]$ y tomando esperanza:

$$r[p] + \sum_{i=1}^n a_i r[p-i] = b_0 \mathbb{E}[x[k]y^*[k-p]].$$

- Si consideramos que $h[k]$ es causal y estable, sabemos que tiene respuesta impulsiva IIR.

$$y[k] = \sum_{q=0}^{\infty} h[q]x[k-q] \quad (h[0] = 1).$$

- Como $x[k]$ es ruido blanco con varianza σ_x^2 , tenemos

$$\mathbb{E}[x[k]y^*[k-p]] = \sum_{q=0}^{\infty} h^*[q] \mathbb{E}[x[k]x^*[k-p-q]] = \sigma_x^2 \sum_{q=0}^{\infty} h^*[q] \delta_{p+q} = \sigma_x^2 h^*[-p]$$

MODELADO AR: ECUACIONES DE YULE-WALKER (II)

Volviendo a la ecuación original de la autocorrelación:

$$r[p] + \sum_{i=1}^n a_i r[p-i] = b_0 \sigma_x^2 \delta_p.$$

Éstas son las ecuaciones de Yule-Walker ([Y 1927; W 1931]):

MODELADO AR: ECUACIONES DE YULE-WALKER (II)

- Matricialmente puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} r[0] & r[-1] & \dots & r[-n] \\ r[1] & r[0] & \dots & r[-n+1] \\ \vdots & & \ddots & r[-1] \\ r[n] & \dots & & r[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Definimos:

$$\mathbf{r}_n \triangleq [r[1] \quad \dots \quad r[n]]^T \quad \boldsymbol{\theta}_n = [a_1 \quad \dots \quad a_n]^T.$$

Particionando la matriz de covarianza, describimos las ecuaciones de Y-W como:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} r[0] & \mathbf{r}_n^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\theta}_n \end{bmatrix} = \sigma_x^2 \\ \mathbf{r}_n + \mathbf{R}_n \boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{0} \end{cases}$$

TÉCNICA DE LA AUTOCOVARIANZA

- Se estima la secuencia de autocovarianza $\{r[k]\}$.
- El estimador sesgado es un buen candidato, ya que da una matriz positiva.
- Se obtiene la matriz de correlación $\hat{\mathbf{R}}_n$.
- Se estiman los coeficientes del AR:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = -\hat{\mathbf{R}}_n^{-1} \hat{\mathbf{r}}_n$$

- Se estima la varianza con la ecuación restante.

TÉCNICAS PARAMÉTRICAS: EL MODELO DE SENOIDES EN RUIDO

- En muchas aplicaciones vinculadas a comunicaciones, radar, etc. se trabaja con un modelo de senoides complejas inmersas en ruido:

$$y[m] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} + v[m].$$

donde:

- ▶ Las $\{\omega_k, k = 1, \dots, K\}$ son las frecuencias de las senoides,
 - ▶ Las $\{\phi_k, k = 1, \dots, K\}$ son sus fases,
 - ▶ Las $\{\alpha_k, k = 1, \dots, K\}$ son sus amplitudes.
- Hipótesis consideradas:
 - ▶ $v[m]$ es ruido blanco complejo, circular, de media nula y varianza σ_v^2 .
 - ▶ El número K de senoides es conocido.
 - ▶ $y[m]$ es un proceso ESA para lo cual, $\phi_k \sim U[-\pi, +\pi]$,

PROCESO ESTACIONARIO?

- Las fases de cada senoide, ϕ_k son desconocidas.
- Si se asumen constantes, aún en el caso de ruido de media nula, la media de $y[m]$ no es constante:

$$\mathbb{E} [y[m]] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} + \mathbb{E} [v[m]] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} \neq \text{cte.}$$

- Es decir, no se cumple la hipótesis de estacionariedad.
- Por lo tanto, se considera lo siguiente:

MODELO PARA LA FASE

Las fases $\{\phi_k, k = 1, \dots, K\}$ son variables aleatorias i.i.d., independientes del ruido, y siguen la distribución uniforme en $[-\pi, \pi]$.

CARACTERÍSTICAS DE $y[m]$

- La señal $y[m]$ es ESA, de media nula y autocovarianza:

$$r_y[n] = \sum_{k=1}^K \alpha_k^2 e^{j\omega_k n} + \sigma_v^2 \delta_{n,0}.$$

- La PSD de la señal y es:

$$\phi_y(\omega) = \text{DTFT}(r_y)(\omega) = 2\pi \sum_{k=1}^K \alpha_k^2 \delta(\omega - \omega_k) + \sigma_v^2.$$

Este espectro se lo conoce como *espectro de líneas*.

POR QUÉ SENOIDES COMPLEJAS

En general, las senoides son complejas, porque están asociadas a un proceso de modulación/demodulación.

Sean $a(t)$ y $\phi(t)$ dos señales de banda acotada. Consideramos la siguiente señal:

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t) \cos(\Omega_c t + \phi(t)) \\ &= a(t) \{ \cos(\phi(t)) \cos(\Omega_c t) - \sin(\phi(t)) \sin(\Omega_c t) \} \\ &= x_I(t) \cos(\Omega_c t) - x_Q(t) \sin(\Omega_c t),\end{aligned}$$

donde $x_I(t) = a(t) \cos(\phi(t))$ y $x_Q(t) = a(t) \sin(\phi(t))$. Es claro que

$$a(t)^2 = x_I^2(t) + x_Q^2(t) \quad \text{y} \quad \tan(\phi(t)) = \frac{x_Q(t)}{x_I(t)}.$$

POR QUÉ SENOIDES COMPLEJAS

- Cuando sólo interesan $a(t)$ y $\phi(t)$, es útil trabajar con

$$x_{bb}(t) = x_I(t) + jx_Q(t).$$

En general, $x_{bb}(t) \in \mathbb{C}$.

- Por ejemplo, si $a(t) = \alpha_0$ y $\phi(t) = \Omega_0 t + \phi_0$,

$$x(t) = \alpha_0 \cos(\Omega_c t + \Omega_0 t + \phi_0),$$

$$x_{bb}(t) = \alpha_0 [\cos(\Omega_0 t + \phi_0) + j \sin(\Omega_0 t + \phi_0)].$$

En tiempo discreto, muestreando con T_s , donde $\omega_0 = T_s \Omega_0 \ll 2\pi$:

$$x_{bb}(m) = \alpha_0 [\cos(\omega_0 m + \phi_0) + j \sin(\omega_0 m + \phi_0)] = \alpha_0 e^{j(\omega_0 m + \phi_0)}.$$

PLANTEO DEL PROBLEMA DE ESTIMACIÓN ESPECTRAL

Considere que la señal observada $y[m]$ responde al modelo

$$y[m] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} + v[m]$$

- $\phi_k \sim U[-\pi, \pi], k = 1, \dots, K,$
- $v[m]$ ruido blanco

PROBLEMA DE ESTIMACIÓN ESPECTRAL

Dado un conjunto finito de muestras

$$\{y[1], \dots, y[N]\},$$

estimar

$$\{\omega_k, k = 1, \dots, K\} \quad \text{y} \quad \{\alpha_k, k = 1, \dots, K\}$$

- Las técnicas que describiremos son algunas de las llamadas de *técnicas de alta resolución* porque, en teoría, permiten separar dos frecuencias f_1, f_2 tales que:

$$|f_1 - f_2| < 1/N \quad \text{o} \quad |\omega_1 - \omega_2| < 2\pi/N$$

que es el límite de resolución del periodograma.

- Proveen estimadores consistentes de las frecuencias.

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LA SEÑAL $y[m]$ (I)

- Consideramos una senoide $x[m]$ de amplitud α_1 y frecuencia ω_1 en el instante m :

$$x[m] = \alpha_1 e^{j(\omega_1 m + \phi_1)}$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LA SEÑAL $y[m]$ (I)

- Consideramos una senoide $x[m]$ de amplitud α_1 y frecuencia ω_1 en el instante m :

$$x[m] = \alpha_1 e^{j(\omega_1 m + \phi_1)}$$

- En el instante $[m - n]$ dicha senoide vale:

$$x[m - n] = \alpha_1 e^{j(\omega_1(m-n) + \phi_1)} = \alpha_1 e^{j(\omega_1 m + \phi_1)} e^{-j\omega_1 n} = x[m] e^{-j\omega_1 n}.$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LA SEÑAL $y[m]$ (I)

- Consideramos una senoide $x[m]$ de amplitud α_1 y frecuencia ω_1 en el instante m :

$$x[m] = \alpha_1 e^{j(\omega_1 m + \phi_1)}$$

- En el instante $[m - n]$ dicha senoide vale:

$$x[m - n] = \alpha_1 e^{j(\omega_1(m-n) + \phi_1)} = \alpha_1 e^{j(\omega_1 m + \phi_1)} e^{-j\omega_1 n} = x[m] e^{-j\omega_1 n}.$$

- Armamos un vector con $L \leq N$ muestras:

$$\mathbf{x}[m] = \begin{bmatrix} x[m] \\ x[m-1] \\ \vdots \\ x[m-L+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega_1} \\ \vdots \\ e^{-j\omega_1(L-1)} \end{bmatrix} \alpha_1 e^{j(\omega_1 m + \phi_1)} = \mathbf{a}(\omega_1) x[m]$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL (II)

- Ahora supongamos que tenemos la suma de K senoides y recolectamos L muestras ($L > K$)

$$y[m] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} + v[m] \quad m = 1 \cdots L$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[L] \\ y[L-1] \\ \vdots \\ y[1] \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^K \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega_k} \\ \vdots \\ e^{-j\omega_k(L-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\omega_k)} \alpha_k e^{j(\omega_k L + \phi_k)} + \begin{bmatrix} v[L] \\ v[L-1] \\ \vdots \\ v[1] \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\omega_1) & \cdots & \mathbf{a}(\omega_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{j(\omega_1 L + \phi_1)} \\ \vdots \\ \alpha_K e^{j(\omega_K L + \phi_K)} \end{bmatrix} + \mathbf{v}$$

o en forma más compacta (omitiendo los índices de tiempo):

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}.$$

MATRIZ DE COVARIANZA DE LAS MUESTRAS (I)

- El vector de muestras \mathbf{y} tiene media nula.
- Su covarianza vale:

$$\mathbb{E} [\mathbf{y}\mathbf{y}^H] = \mathbb{E} [(\mathbf{A}\mathbf{x})(\mathbf{A}\mathbf{x})^H] + \sigma_v^2\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbb{E} [\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}.$$

- Al hacer $\mathbf{x}\mathbf{x}^H$ obtenemos una matriz de $K \times K$ que tiene todos los productos de los elementos de \mathbf{x} tomados de a dos. Por ejemplo, si $K = 2$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbf{x}\mathbf{x}^H] &= \mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{j(\omega_1 L + \phi_1)} \\ \alpha_2 e^{j(\omega_2 L + \phi_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-j(\omega_1 L + \phi_1)} & \alpha_2 e^{-j(\omega_2 L + \phi_2)} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 e^{j(\omega_1 - \omega_2)L} \mathbb{E}[e^{j(\phi_1 - \phi_2)}] \\ \alpha_1 \alpha_2 e^{j(\omega_2 - \omega_1)L} \mathbb{E}[e^{j(\phi_2 - \phi_1)}] & \alpha_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

MATRIZ DE COVARIANZA DE LAS MUESTRAS (II)

- Al tomar esperanza, tenemos que:

$$E[\mathbf{xx}^H] = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_K^2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{D}$$

por ser las fases independientes y de media nula

OBSERVACIONES

Podemos escribir:

$$\mathbf{R} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{yy}^H] = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}$$

donde vemos que:

- La matriz \mathbf{D} es constante y contiene las amplitudes de las senoides al cuadrado.
- En la matriz \mathbf{A} depende de las ω_k a estimar y de L , la cantidad de muestras observadas.

PROPIEDADES DE \mathbf{A} (UN POCO DE ÁLGEBRA)

$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{L \times K}$ con $L \geq K$ (más muestras que senoides).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\omega_1) & \cdots & \mathbf{a}(\omega_K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j\omega_1} & \cdots & e^{-j\omega_K} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-j\omega_1(L-1)} & \cdots & e^{-j\omega_K(L-1)} \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} es una matriz de *Vandermonde* con nodos $\omega_1, \dots, \omega_K$. Si los nodos son distintos, i.e., $\omega_i \neq \omega_j$, para todo $i \neq j$, entonces

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = K$$

PROPIEDADES DE \mathbf{A} (DEMOSTRACIÓN)

- Supongamos que $K = L$ y busquemos el núcleo de \mathbf{A}^T . Sea

$$\mathbf{z} = [z_0 \quad \dots \quad z_{L-1}]^T .$$

Hacemos:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T(\omega_1) \mathbf{z} \\ \mathbf{a}^T(\omega_2) \mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^T(\omega_K) \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + z_1 e^{-j\omega_1} + z_2 (e^{-j\omega_1})^2 + \dots + z_{L-1} (e^{-j\omega_1})^{(L-1)} \\ z_0 + z_1 e^{-j\omega_2} + z_2 (e^{-j\omega_2})^2 + \dots + z_{L-1} (e^{-j\omega_2})^{(L-1)} \\ \vdots \\ z_0 + z_1 e^{-j\omega_K} + z_2 (e^{-j\omega_K})^2 + \dots + z_{L-1} (e^{-j\omega_K})^{(L-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Tenemos un polinomio de orden $L - 1$ evaluado en $K = L$ valores, $\omega_1, \dots, \omega_K$
- Para resolver la ecuación anterior, necesito $K = L$ raíces de un polinomio de orden $L - 1$. Luego, la única posibilidad para que $\mathbf{A}^T \mathbf{z} = 0$ es que $\mathbf{z} = 0$.
- Es decir, $\text{rango}(\mathbf{A}) = L = K$.
- Si $L > K$, las columnas de \mathbf{A} siguen siendo l.i. mientras ω_i distintos.
- Por lo tanto $\text{rango}(\mathbf{A}) = K$ siempre que $L \geq K$.

TRABAJANDO CON \mathbf{ADA}^H

- Asumimos que $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, K$. Luego, \mathbf{D} es inversible
- Demostramos que $\text{rango}(\mathbf{A}) = K$. Esto implica que
 - ▶ $\text{rango}(\mathbf{AD}) = K$.
 - ▶ $\text{rango}(\mathbf{ADA}^H) = K$.
- Por otro lado, \mathbf{ADA}^H es hermítica y diagonalizable.
- \mathbf{ADA}^H es de $L \times L$ y tiene rango K . Esto implica que
 - ▶ Tiene $L - K$ autovalores nulos y el resto son positivos
- Entonces la matriz de autocovarianza de las muestras $\mathbf{R} = \mathbf{ADA}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I}$, tiene las siguientes propiedades:
 - ▶ \mathbf{R} matriz de $L \times L$
 - ▶ Es hermítica y es diagonalizable.
 - ▶ Tiene $L - K$ autovalores que valen σ_v^2 y K autovalores mayores que σ_v^2 .

- MUSIC significa *MU*ltiple *SI*gnal *C*lassification.
- Esta técnica se basa en las propiedades de la matriz \mathbf{R} expuestas hasta ahora para estimar las frecuencias deseadas.
- La técnica de Pisarenko [1973] es MUSIC[1979] con $L = K + 1$.

PRINCIPIO DEL MÉTODO MUSIC (I)

- \mathbf{R} tiene $L - K$ autovalores iguales a σ_v^2 . Los $L - K$ autovectores asociados son l.i.
- Sea \mathbf{G} la matriz que contiene los autovectores de \mathbf{R} asociados a σ_v^2 :

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{L-K}]$$

- Entonces tenemos:

$$\mathbf{R}\mathbf{G} = (\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{I})\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H\mathbf{G} + \sigma_v^2\mathbf{G} = \sigma_v^2\mathbf{G}$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H\mathbf{G} = \mathbf{0}$$

PRINCIPIO DEL MÉTODO MUSIC (II)

- Como \mathbf{AD} es de $L \times K$ y $\text{rango}(\mathbf{AD}) = K$, las columnas de \mathbf{AD} son l.i., y entonces $\mathbf{ADA}^H\mathbf{G} = 0$ si $\mathbf{A}^H\mathbf{G} = 0$.

CONCLUSIÓN

-

$$\mathbf{A}^H\mathbf{G} = 0.$$

Esto implica que las columnas de \mathbf{A} son ortogonales a las de \mathbf{G} , es decir, $\text{Col}(\mathbf{A}) \subset \text{Nul}(\mathbf{G}^H)$.

- Por otro lado, como $\text{rango}(\mathbf{A}) = K$, y $\text{rango}(\mathbf{G}) = L - K$ entonces $\dim(\text{Nul}(\mathbf{G})) = K$. Luego,

$$\text{Col}(\mathbf{A}) = \text{Nul}(\mathbf{G}^H).$$

SOLUCIÓN

- Sabemos que la columna k -ésima de \mathbf{A} es de la forma:

$$\mathbf{a}(\omega_k) = [1 \quad e^{-j\omega_k} \quad \dots \quad e^{-j\omega_k(L-1)}]^T$$

donde nuestro objetivo es averiguar ω_k .

OBSERVACIONES

- Como $\mathbf{G}^H \mathbf{A} = \mathbf{0}$, sabemos que

$$\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\omega_k) = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, K.$$

es decir, las ω_k que queremos estimar son soluciones de la ecuación:

$$\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\omega) = \mathbf{0}.$$

La ecuación

$$\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\omega_k) = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, K.$$

tiene otras soluciones que no sean las que buscamos ?

No, porque los vectores $\mathbf{a}(\omega_k)$ son l.i. si las ω_k son diferentes y $\dim(\text{Nul}(\mathbf{G}^H)) = K$, por lo que no hay un conjunto de más de K vectores l.i..

Además las columnas de \mathbf{A} son l.i. y por lo tanto generan **todo el núcleo de \mathbf{G}^H** . Por ende, **no puede haber más que las K soluciones halladas**, que son las frecuencias que deseamos estimar.

MÉTODO TEÓRICO DE RESOLUCIÓN PARA MUSIC

ALGORITMO MUSIC TEÓRICO

- 1 Calculamos $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}$ y la diagonalizamos.
- 2 Armamos \mathbf{G} la matriz con los autovectores asociados a σ_v^2 . Estos son los últimos $L - K$ autovectores.
- 3 Obtenemos las ω_j resolviendo la ecuación $\mathbf{G}^H\mathbf{a}(\omega_j) = \mathbf{0}$ que tiene K soluciones.

Comentarios:

- Se requiere como mínimo que $L \geq K + 1$, de otro modo \mathbf{G} no puede armarse (al menos una muestra más que el número de senoides).
- Dado que no conocemos exactamente la matriz \mathbf{G} deben recurrirse a otra estrategia para obtener soluciones aproximadas.
- Esto da lugar a dos versiones del algoritmo MUSIC.

CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

- En la práctica, empezamos con $\hat{\mathbf{R}}$ que es una estimación de \mathbf{R} utilizando $y[1], \dots, y[N]$.
- Luego, calculamos $\hat{\mathbf{G}}$ que es una estimación de \mathbf{G} .
- Se busca resolver

$$\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega) = \mathbf{0}.$$

Pero esta ecuación puede no tener K soluciones.

- Una solución es trabajar en un dominio ampliado reemplazando

$$\mathbf{a}(\omega) = [1 \quad e^{-j\omega} \quad \dots \quad e^{-j\omega(L-1)}]^T$$

por

$$\mathbf{p}(z) = [1 \quad z \quad z^2 \quad \dots \quad z^{L-1}]^T$$

- Se tiene que:

$$\mathbf{p}(z)|_{z=e^{-j\omega}} = \mathbf{a}(\omega)$$

- Resolvemos

$$\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{p}(z) = 0$$

La solución de esta ecuación dará $L - 1$ soluciones, de las cuales K deberían estar cerca del círculo unitario si $\hat{\mathbf{G}}$ es un buen estimador.

EJEMPLO (I)

- Consideremos una sola senoide ($K = 1$) y tomamos $L = 2$.
- En ese caso \mathbf{G} es de 2×1 .
- Supongamos que la \mathbf{G} verdadera es de la forma:

$$\mathbf{G}^H = \begin{bmatrix} -e^{-j} & 1 \end{bmatrix}.$$

- Resolvemos:

$$\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\omega) = \begin{bmatrix} -e^{-j} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega} \end{bmatrix} = e^{-j\omega} - e^{-j} = 0$$

para obtener la frecuencia buscada:

$$\omega = 1$$

EJEMPLO (II)

- Supongamos al estimar \mathbf{G} hubo algunos errores numéricos y obtuvimos:

$$\hat{\mathbf{G}}^H = \begin{bmatrix} -e^{-j} & 0,99 \end{bmatrix}.$$

- Al intentar resolver $\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega) = 0$ encontramos un problema porque no tiene solución para ω real.
- Sin embargo al resolver la ecuación $\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{p}(z) = \mathbf{0}$:

$$\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{p}(z) = \begin{bmatrix} -e^{-j} & 0,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} = 0$$

obtenemos:

$$z = 1,01e^{-j}.$$

- La solución obtenida no está en el círculo unitario pero la fase de z nos da la frecuencia buscada, es decir, deducimos que:

$$\omega \approx 1$$

- Si hubiesemos planteado $\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega) = 0$, la ecuación no hubiera tenido solución.

IMPLEMENTACIONES DE MUSIC

- Sabemos que:

$$\text{Nul}(\mathbf{G}^H) = \text{Nul}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H),$$

de modo que lo que se verifica:

$$\mathbf{G}^H \mathbf{p}(z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{p}(z)^H \mathbf{G}\mathbf{G}^H \mathbf{p}(z) = 0$$

- Pero $\mathbf{p}(z)^H = \mathbf{p}(z^{-1})^T$ cuando $|z| = 1$.
- Resolviendo entonces la ecuación:

$$\mathbf{p}(z^{-1})^T \mathbf{G}\mathbf{G}^H \mathbf{p}(z) = 0$$

obtenemos el mismo resultado que resolviendo el problema original.

- Es buscar los ceros de un polinomio real de orden $2(L - 1)$
- Esto da lugar a MUSIC en su versión de las raíces.

SOLUCIÓN PROPUESTA

1 Estimar \mathbf{R} a partir de las N muestras de $y[m]$.

2 Diagonalizar $\hat{\mathbf{R}}$ y obtener $\hat{\mathbf{G}}$.

3 Armar el vector

$$\mathbf{p}(z) = [1 \quad z \quad z^2 \quad \dots \quad z^{L-1}]^T$$

4 Obtener el polinomio de orden $2(L - 1)$:

$$\mathbf{p}(z^{-1})^T \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{p}(z),$$

que tiene $2(L - 1)$ raíces, en pares recíprocos conjugados.

5 Buscar las $L - 1$ raíces que están en el círculo $|z| \leq 1$.

6 De las $L - 1$ raíces obtenidas seleccionar las K raíces más cercanas al círculo unidad $\{c_i\}_{k=1}^K$ y estimar

$$\hat{\omega}_k = \text{fase}\{c_k\} \quad k = 1, \dots, K.$$

OTRA ALTERNATIVA A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

- Hemos visto que nuestro problema puede reformularse a resolver:

$$\mathbf{p}(z^{-1})^T \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{p}(z) = 0 \quad (1)$$

con z complejo.

OBSERVACIÓN

- Sabemos que las K soluciones buscadas estarán muy cerca del círculo unitario, pero no exactamente sobre él.
- Esto implica que si evaluamos $\mathbf{a}(\omega)^H \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega)$ cerca de una solución de (1) tendremos:

$$\mathbf{a}(\omega)^H \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega) \approx 0.$$

- Esto nos da otra forma de resolver el problema.

ALGORITMO ESPECTRAL

- Estimar de $\hat{\mathbf{R}}$ de $L \times L$ a partir de las N muestras de $y(n)$.
- Diagonalizar $\hat{\mathbf{R}}$ y obtener $\hat{\mathbf{G}}$.
- Obtener las frecuencias deseadas buscando los ω en $[-\pi; \pi]$ donde la función:

$$\frac{1}{\mathbf{a}(\omega)^H \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega)}$$

tiene sus K máximos (donde $\mathbf{a}(\omega)^H \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega)$ es casi nula).

La función

$$\frac{1}{\mathbf{a}(\omega)^H \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\omega)}$$

es conocida como el *pseudoespectro*.

ESPACIO DE SEÑAL Y ESPACIO DE RUIDO

Al deducir el método MUSIC usamos el modelo matricial de la covarianza de las observaciones

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}.$$

Vimos que los autovalores de \mathbf{R} se podían dividir en dos grupos.

$$\begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_v^2\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

donde $\Lambda \in \mathbb{C}^{K \times K}$ es una matriz diagonal que contiene los primeros K autovalores superiores a σ_v^2 . Sea $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ la matriz de autovectores asociados a Λ y $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{L \times (L-K)}$ la matriz de los autovectores restantes, es decir,

$$\mathbf{R} = [\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_v^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^H \\ \mathbf{G}^H \end{bmatrix}.$$

En particular, \mathbf{S} tiene sus columnas l.i, y por ende $\text{rango}(\mathbf{S}) = K$.

ESPACIO DE SEÑAL Y ESPACIO DE RUIDO

$\text{Col}(S)$ es el *espacio de señal* y $\text{Col}(G)$ es el *espacio de ruido*.

Por ser \mathbf{R} una matriz hermítica, todos sus autovectores son ortogonales entre sí, y por ende

$$\text{Col}(S) \perp \text{Col}(G)$$

El método MUSIC se basa en buscar los vectores generadores del subespacio ortogonal al espacio de ruido, es decir, resolver

$$\mathbf{A}^H \mathbf{G} = 0.$$

El método ESPRIT que vamos a ver, explota otras propiedades de estas matrices para resolver este problema.

MÉTODO ESPRIT

Definimos la matriz diagonal \mathbf{Z} ,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-j\omega_K} \end{bmatrix}.$$

y dos nuevas matrices

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_1} & \dots & e^{-j\omega_K} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-j\omega_1(L-1)} & \dots & e^{-j\omega_K(L-1)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-j\omega_1(L-2)} & \dots & e^{-j\omega_K(L-2)} \end{bmatrix}$$

Vemos que

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}$$

Retomamos la matriz de Vandermonde en el método MUSIC

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\omega_1} & \dots & e^{-j\omega_K} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-j\omega_1(L-1)} & \dots & e^{-j\omega_K(L-1)} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{A}_2 = [0 \quad \mathbf{I}_{L-1}] \mathbf{A} \quad \mathbf{A}_1 = [\mathbf{I}_{L-1} \quad 0] \mathbf{A}$$

Nota: Hay dos notaciones usuales para este punto. Una es la que indicamos arriba. Otra notación es \mathbf{A}_f para indicar la matriz sin la primer fila, y \mathbf{A}_l para la matriz sin la última fila.

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}$$

Esta ecuación resulta en la propiedad de invarianza rotacional:

INVARIANZA ROTACIONAL

Sean

- $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{L \times K}$: matriz de Vandermonde con nodos en $\omega_k, k = 1, \dots, K$
- $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{K \times K}$: matriz diagonal con entradas $e^{-j\omega_k}, k = 1, \dots, K$.

Luego,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}$$

El método ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques*) se basa en esta observación.

Volvemos a

$$\mathbf{A}^H \mathbf{G} = 0$$

Esto implica que $\text{Col}(\mathbf{A}) \perp \text{Col}(\mathbf{G})$. Pero vimos que $\text{Col}(\mathbf{G}) \perp \text{Col}(\mathbf{S})$. Como $\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{S}) = K$ y $\text{rango}(\mathbf{G}) = L - K$, entonces,

$$\text{Col}(\mathbf{A}) = \text{Col}(\mathbf{S}).$$

Esto implica que existe una matrix no singular \mathbf{C} tal que

$$\mathbf{S} = \mathbf{AC}$$

MÉTODO ESPRIT

A partir de la matriz \mathbf{S} también podemos obtener

$$\mathbf{S}_2 = [0 \quad \mathbf{I}_{L-1}] \mathbf{S} \quad \mathbf{S}_1 = [\mathbf{I}_{L-1} \quad 0] \mathbf{S}$$

Luego, recordando que $\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ tenemos

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{C} \quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{C}$$

Usando el principio de invarianza rotacional,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_2 &= \mathbf{A}_2\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{Z}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{A}_1\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{S}_1\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}. \end{aligned}$$

Como \mathbf{S}_1 tiene rango completo, $[\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1]^{-1}$ existe. Entonces

$$[\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1]^{-1} \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2 = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{C}.$$

Es decir que \mathbf{Z} y $[\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1]^{-1} \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2$ son dos matrices similares que tienen por ende los mismos autovalores. Como \mathbf{Z} es una matriz diagonal con entradas $e^{-j\omega_i}$, se obtienen las frecuencias resolviendo el problema de autovalores.

ESPRIT: ALGORITMO

- A partir de $y[1], \dots, y[N]$, estimar la matriz de covarianza $\hat{\mathbf{R}}$.
- Calcular la descomposición en autovalores y autovectores

$$\mathbf{R} = [\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] \Gamma \begin{bmatrix} \mathbf{S}^H \\ \mathbf{G}^H \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{S} contiene los primeros K autovectores.

- Obtener \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 quitando la última y la primera fila de \mathbf{S}
- Calcular los autovalores de $[\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1]^{-1} \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2$
- Obtener las frecuencias ω_i a partir de los autovalores anteriores.

ESPRIT: PROPIEDADES

- ESPRIT es un algoritmo consistente
- Si el orden K es conocido, ESPRIT no tiene inconvenientes con la obtención de frecuencias espúreas
- Una de sus debilidades es que depende de la solución de un problema de autovalores que puede ser muy sensible a problemas numéricos. Cuando N es pequeño es más conveniente, mirar a

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \mathbf{Z}_C.$$

donde $\mathbf{Z}_C = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{C}$. Este sistema se puede resolver utilizando *Total Least Squares* (A ver para el que esté interesado).

- Otro método que utiliza el principio de invarianza es el Matrix Pencil Method (MPM). Éste parte de la matriz de Hankel de las observaciones y obtiene estimaciones similares.
- Una de las debilidades del ESPRIT es que requiere el conocimiento del orden del modelo K .

QUÉ PASA SI EL RUIDO NO ES BLANCO (DECORRELACIONADO)?

- El modelo de suma de senoides, asume ruido blanco. Si éste no lo es, las técnicas que presentaremos pueden perder desempeño.
- Para mitigar esto, podría hacerse lo siguiente:
 - ▶ Si el tiempo de decorrelación del ruido en tiempo continuo (previo al muestreo) es conocido, digamos, T_c , podría elegirse el período de muestreo $T_s > T_c$ para que el ruido muestreado sea blanco.

En ese caso la frecuencia de muestreo F_s debería cumplir:

$$\text{máx}\{\Omega_1, \dots, \Omega_K\} < \pi F_s < \frac{\pi}{T_c}.$$

- ▶ Si la estadística del ruido es conocida, podría implementarse un filtro blanqueador. Las senoides no se verían afectas más que en su amplitud. Qué sucede en este caso si el ruido tiene mucha potencia en una frecuencia cercana a alguna $\omega_i \in \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$?
- ▶ Utilizar otras técnicas paramétricas para modelar el ruido (por ejemplo, modelos AR).

MÉTODO DE LOS CUADRADOS MÍNIMOS NO-LINEALES

- Retomando el problema inicial
- Dadas N muestras ruidosas $y[m]$, obtener los parámetros α_k, ω_k del modelo

$$x[m] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)}$$

- Solución intuitiva

$$\min_{\alpha, \omega} \sum_{m=1}^N \left| y[m] - \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} \right|^2$$

La solución de este problema es conocida como el método NLS (Nonlinear Least-Squares).

- La solución del problema anterior no es sencilla.
- El funcional a minimizar tiene varios mínimos globales, lo que dificulta la resolución numérica del problema
- Sin embargo, es interesante estudiar algunas de sus propiedades

MÉTODO NLS: REFORMULACIÓN

Sea $\beta_k = \alpha_k e^{j\phi_k}$. Luego,

$$x[m] = \sum_{k=1}^K \beta_k e^{j\omega_k m}$$

y podemos plantear para $\mathbf{Y} = [y[1] \quad \cdots \quad y[N]]$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} e^{j\omega_1} & \cdots & e^{j\omega_K} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{jN\omega_1} & \cdots & e^{jN\omega_K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v[1] \\ \vdots \\ v[N] \end{bmatrix} = \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v},$$

donde \mathbf{B} es una matriz de Vandermonde de rango completo si todas las frecuencias son distintas. Vemos que

$$\sum_{m=1}^N \left| y[m] - \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} \right|^2 = [\mathbf{Y} - \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}]^H [\mathbf{Y} - \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}] = \|\mathbf{Y} - \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

MÉTODO NLS: REFORMULACIÓN

Supongamos que \mathbf{B} es conocida. Ésta es la situación luego de obtener las frecuencias con MUSIC o con ESPRIT. Podemos entonces minimizar

$$\min_{\beta} \|\mathbf{Y} - \mathbf{B}\beta\|^2$$

Luego, β es la solución de mínimos cuadrados,

$$\beta = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Y} \quad (2)$$

Resolviendo este problema, obtenemos la solución completa al problema de estimación espectral.

MÉTODO NLS: REFORMULACIÓN

Surge una pregunta. Podríamos haber resuelto el problema NLS desde un principio?

Retomo problema inicial

$$\sum_{m=1}^N \left| y[m] - \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} \right|^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{B}\beta\|^2$$

Luego, el problema original era:

$$\min_{\mathbf{B}, \beta} \|\mathbf{Y} - \mathbf{B}\beta\|^2$$

Hallar en forma simultánea \mathbf{B} y β es igual que resolver el problema inicial. Pero podemos plantear un esquema en etapas.

MÉTODO NLS: REFORMULACIÓN

Supongamos primero que \mathbf{B} es conocido. Luego, la solución podemos encontrar β

$$\beta = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Y} \quad (3)$$

Luego, reemplazando esta expresión arriba y desarrollando, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Y} - \mathbf{B}\beta\|^2 &= \left[\mathbf{Y} - \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Y} \right]^H \left[\mathbf{Y} - \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Y} \right] \\ &= \mathbf{Y}^H \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^H \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pero ahora, sólo tengo que minimizar con respecto a \mathbf{B} para obtener ω_i y luego reemplazar en (3) para obtener β_i . Es más, minimizar (4) con respecto a \mathbf{B} es equivalente a buscar

$$\max_{\mathbf{B}} \mathbf{Y}^H \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Y}.$$

MÉTODO NLS: PROPIEDADES

- El estimador es insesgado.
- Se puede demostrar que si el ruido es blanco con densidad espectral de potencia σ_v^2 , las estimaciones $\hat{\omega}_k$ tienen la siguiente matriz de covarianza

$$\text{Cov}(\hat{\omega}) = \frac{6\sigma_v^2}{N^3} \begin{bmatrix} 1/\alpha_1^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\alpha_K^2 \end{bmatrix}$$

- El estimador es consistente, es decir, a medida que aumenta N , la varianza de las estimaciones individuales disminuye.
- En este caso, cuando $N \rightarrow \infty$, $\text{Cov}(\hat{\omega})$ alcanza el límite de Cramer-Rao (mínimo posible error alcanzable para un estimador insesgado).

MÉTODO NLS: INCONVENIENTES

$$\max_{\mathbf{B}} \mathbf{Y}^H \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Y}.$$

Resolver este problema es muy complejo

- Funcional no-convexo, con múltiples máximos locales
- Se requiere una inicialización muy precisa para poder efectuar una búsqueda numérica al estilo Newton
- Las propiedades estadísticas para N finito y pequeño no resultan tan alentadoras como para el caso asintótico.

MÉTODO NLS: INCONVENIENTES

Recientemente¹, se propuso una solución NLS con restricciones.

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \omega, \phi} \sum_{m=1}^N \left| y[m] - \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{j(\omega_k m + \phi_k)} \right|^2 \\ \text{s.t. } \text{rango}(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H) = K \end{aligned}$$

La formulación exacta es muy compleja, pero utilizando el algoritmo de optimización llamado ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers), se obtiene una implementación eficiente y con buena precisión.

¹F. Andersson, M. Carlsson, J. Tournet and H. Wendt, "A New Frequency Estimation Method for Equally and Unequally Spaced Data," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 62, no. 21, pp. 5761-5774, Nov.1, 2014

- 1 Petre Stoica, Randolph L. Moses, Spectral Analysis of Signals, Prentice Hall, 2005
- 2 Dimitris Manolakis, Vinay K. Ingle, Stephen M. Kogon, Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing, Artech House Signal Processing Library, 2005